Vektorski prostori

October 2, 2019

Vektorski prostor

Neka je V neprazan skup čije elemente $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$, ... nazivamo ***vektorima*** i $\mathbb{C}$ skup kompleksnih brojeva čije elemente α, β, γ, ... nazivamo ***skalarima***. Neka su definisane operacije:

1. $\mathbf{x} + \mathbf{y} \in V$
2. $\alpha \mathbf{x} \in V$

koje zadovoljavaju aksiome:

a) $\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{y} + \mathbf{x}$

b) $\mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z}) = (\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z}$

c) $\exists \mathbf{0} \in V, \forall \mathbf{x} \in V : \mathbf{x} + \mathbf{0} = \mathbf{x}$

d) $\forall \mathbf{x} \in V, \exists (-\mathbf{x}) \in V : \mathbf{x} + (-\mathbf{x}) = \mathbf{0}$

e) $(\alpha\beta)\mathbf{x} = \alpha(\beta\mathbf{x})$

f) $\alpha(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \alpha\mathbf{x} + \alpha\mathbf{y}$

g) $(\alpha + \beta)\mathbf{x} = \alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{x}$

h) $1 \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x}$

tada je V ***vektorski prostor*** nad $\mathbb{C}$.

Primeri

- $\mathbb{R}^n = \{(x_1, ..., x_n) | x_i \in \mathbb{R}\}$
- $C[a, b] = \{f | f : [a, b] \to \mathbb{R}\}$ - skup neprekidnih funkcija na $[a, b]$
- $M_{m \times n}$ - skup matrica dimenzije $m \times n$
- $P_n(x)$ - polinomi stepena ne većeg od n.
- ...

Vektorski podprostor

Definicija

Neka je V vektorski prostor i W neprazan podskup od V ($W \subseteq V$). Tada se za W kaže da je ***podprostor*** *od V ako je W vektorski prostor nad operacijama sabiranja i množenja skalarom definisanim u V.*

Trivijalni podprostori vektorstog prostora V:

- $W = \{\mathbf{0}\}$
- V

Teorema

Ako su W i U podprostori vektorskog prostora V onda je i njihov presek $W \cap U$ podprostor od V.

Dokaz na času.

Linearna zavisnost i nezavisnost vektora

Definicija

Neka je V vektorski prostor. Za vektor $\mathbf{v} \in V$ se kaže da je ***linearna kombinacija*** *vektora $\mathbf{u}_1, ..., \mathbf{u}_k \in V$ ako se $\mathbf{v}$ može zapisati u obliku:*

$$v = \alpha_1 \mathbf{u}_1 + ... + \alpha_k \mathbf{u}_k$$

gde su $\alpha_1, ..., \alpha_k$ skalari.

Definicija

Vektori $\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_k \in V$ su ***linearno nezavisni*** *ako jednačina*

$$\alpha_1 \mathbf{v}_1 + ... + \alpha_k \mathbf{v}_k = \mathbf{0}$$

ima samo trivijalno rešenje $\alpha_1 = ... = \alpha_k = 0$.
Ukoliko postoje netrivijalna rešenja onda su vektori $\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_k$ ***linearno zavisni****.*

Teorema

Skup $S = \{\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_k\}, k \geq 2$ je linearno zavistan akko se bar jedan vektor $\mathbf{v}_i, i = 1, ..., k$ može zapisati kao linearna kombinacija drugih vektora iz V.

Dokaz na času.

Baza vektorskog prostora

Definicija

Neka je $S = \{\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_k\}$ podskup vektorskog prostora V. Skup S je ***pokrivač*** *od V ako se svaki vektor iz V može zapisati kao linearna kombinacija vektora iz S.*

Definicija

Skup $B = \{\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_k\} \subset V$ je baza vektorskog prostora V ako je:

1. *B je pokrivač od V i*
2. *B je linearno nezavistan skup.*

Teorema

Ako je $B = \{\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_n\}$ baza vektorskog prostora V onda se svaki vektor $\mathbf{v} \in V$ može zapisati na jedinstven način kao linearna kombinacija vektora iz B.

Dokaz na času.

Definicija

Ako vektorski prostor V ima bazu od n vektora, onda se broj n naziva dimenzijom vektorskog prostora V ($\dim(V) = n$).

Ako V sadrži samo nula vektor, tj. $V = \{\mathbf{0}\}$ onda $\dim(V) \overset{def}{=} 0$.

Posledica

Ako je $B = \{\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_n\}$ *baza vektorskog prostora* V *onda svaki skup koji sadrži više od* n *vektora iz* V *je linearno zavistan.*

Posledica

Ako vektorski prostor V *sadrži jednu bazu sa* n *elemenata, onda svaka baza od* V *ima* n *elemenata.*